Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologia

Derivate

Df Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto e sia $x_0 \in A$
Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$
Diciamo che $f(x)$ è derivabile in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ esiste finito}$$

In tal caso definiamo $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Notazione $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ viene detto rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0

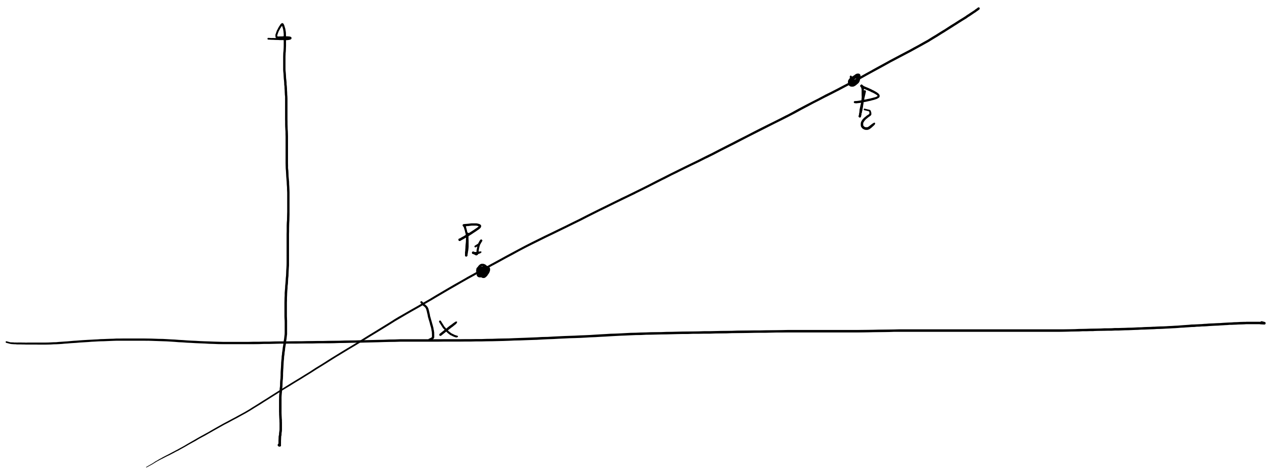
Richiamo: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ consideriamo due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_1 \neq P_2$
l'equazione della retta (unica!) passante per P_1 e P_2 è data

$$\boxed{\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}}$$

Ossia
$$\boxed{y = y_2 + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_2}$$

Ossia
$$y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + \left(y_2 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_2 \right)$$

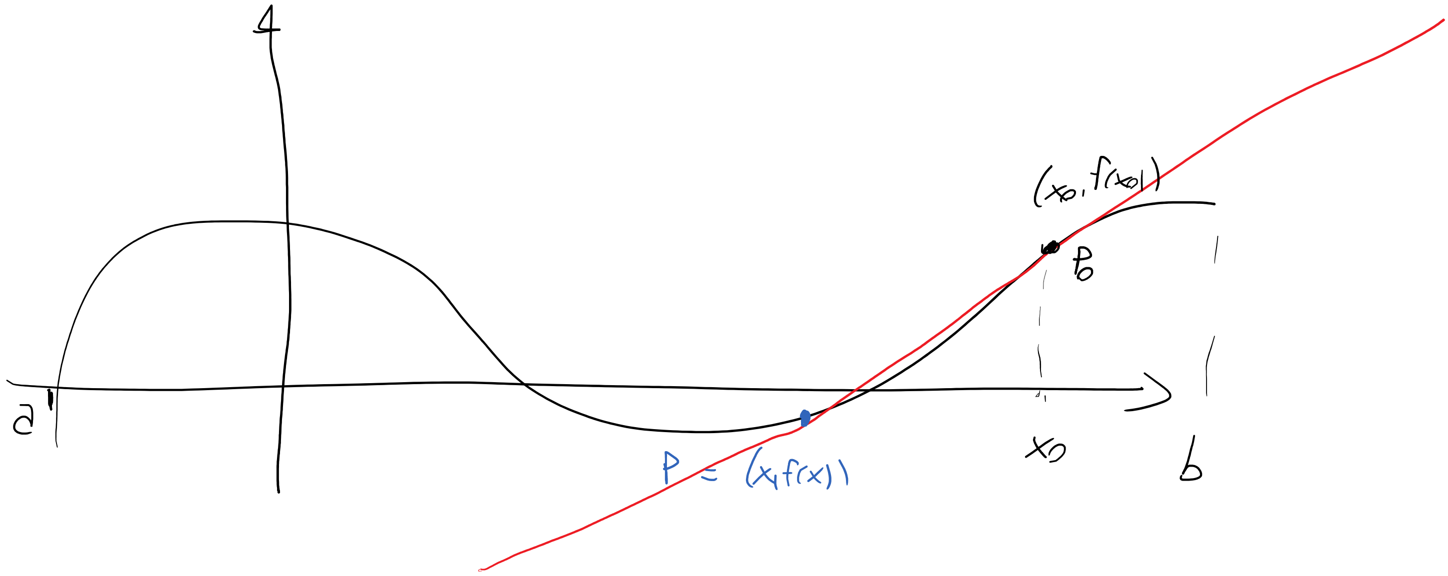
ricordo che il numero che accompagna la variabile x descrive "il rapporto incrementale della retta"



Il rapporto incrementale coincide con la tangente dell'angolo che la retta forma rispetto all'asse $\vec{x}$

Torniamo alle funzioni:

Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e considero $x_0 \in A$ (A è aperto)



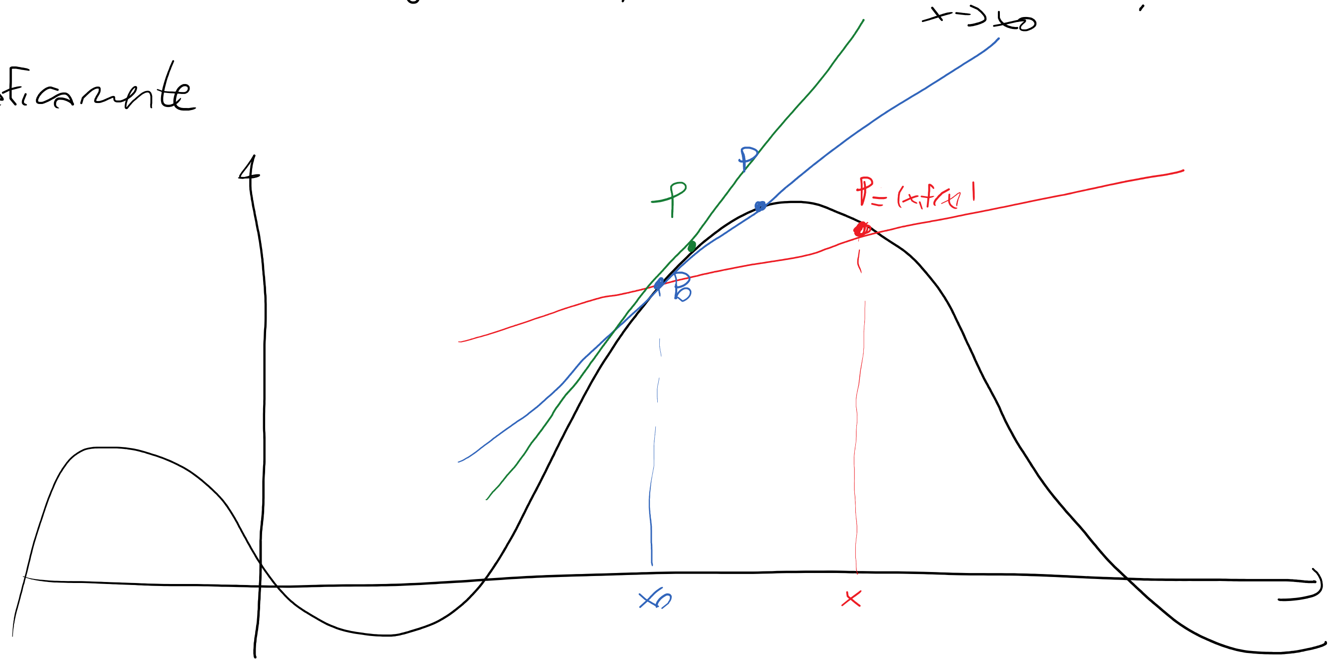
Casidero il punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e sia $P = (x, f(x))$ un altro punto qualunque del grafico della funzione

Da quanto detto sopra: il rapporto incrementale della retta $\overline{PP_0}$ è

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Perché abbiamo l'esigenza di passare al $\lim_{x \to x_0}$?

Graficamente



Notiamo che a mano a mano che il punto P, del grafico della funzione, si avvicina a P_0, la retta passante per P_0P, approssima la retta tangente al grafico della funzione in $(x_0, f(x_0))$

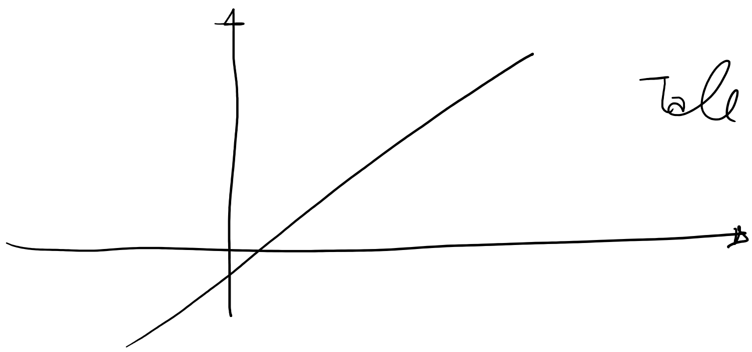
Ossia: considerazione geometrica della derivata

La derivata $f'(x_0)$ di $f(x)$ in x_0 rappresenta il rapporto incrementale della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$

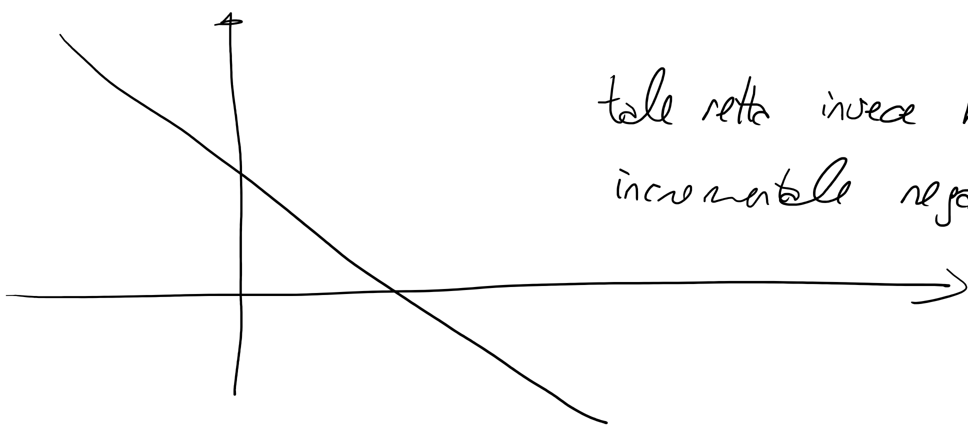
Da cui, l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in $(x_0, f(x_0))$ è

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Osservazione:

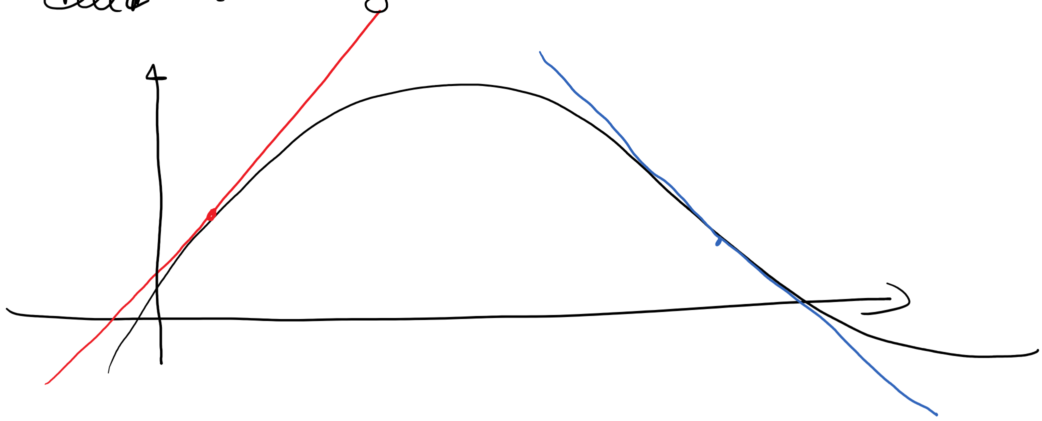


Tale retta ha rapporto incrementale positivo



tale retta invece ha rapporto incrementale negativo

Nel caso della retta tangente a $f(x)$ in un punto,



Segno che nelle regioni in cui $f(x)$ è monotona crescente in tali punti la retta tangente ha coeff. angolare positivo.
Al contrario, nelle regioni in cui $f(x)$ è monotona decrescente le rette tangenti hanno coeff. angolari negativo

Poichè il coeff. angolare (o rapporto incrementale) della retta tangente coincide con $f'(x)$
Otteniamo

Se $f(x)$ è monotona crescente in $B \subseteq A$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \text{in } B$$

Quindi il segno della derivata ci descrive l'andamento della funzione
Descriviamo le derivate di funzioni note:

1. $f(x) = c$ (Funzione costante)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{} = \lim \frac{c-c}{} = \lim \frac{0}{}$

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0}$

$$= 0$$

$$\boxed{f(x) = c \implies f'(x) = 0}$$

Proprietà (linearità della derivata)

Siano $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto e $x_0 \in A$

e considero $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano derivabili in x_0. Allora

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile in x_0 e vale

$$\boxed{(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)}$$

Dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha (f(x) - f(x_0)) + \beta (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Calcoliamo derivata di: $f(x) = x^n$

Fisso $x_0 \in \mathbb{R}$

Ricordo che $\forall n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Da questa formula, possiamo risolvere

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}\left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)}{\cancel{x - x_0}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) =$$

$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} =$$

$$= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ - termini}} =$$

$$= n \cdot x_0^{n-1}$$

Scopro $\boxed{f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$

② Derivata polinomi

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \implies f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 + 0}$$

③ Derivata esponenziale $f(x) = a^x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} \qquad \left(y = x - x_0 \quad \lim_{x \to x_0} y = 0 \right)$$

$$= a^{x_0} \lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = a^{x_0} \log a$$

ossia $$\boxed{f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \cdot \log a}$$

caso particolare $$\boxed{f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x}$$

④ Derivata del logaritmo $f(x) = \log_a x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\log_a \left(\frac{x}{x_0}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x_0} \frac{\log_a \left(\frac{x}{x_0}\right)}{\frac{x}{x_0} - 1} =$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{\log_a \left(1 + \left(\frac{x}{x_0} - 1\right)\right)}{\frac{x}{x_0} - 1} = (*)$$

voglio cambiare variabile $\boxed{y = \frac{x}{x_0} - 1}$ $\lim_{x \to x_0} y = 0$

$$(*) = \frac{1}{x_0} \lim_{y \to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \frac{1}{x_0} \log_a e = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{\log a}$$

$$\boxed{f(x) = \log_a x \implies f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}}$$

(5) Derivata di $f(x) = \operatorname{sen} x$

Ricordo: $\boxed{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

(Prostaferesi)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} \overset{\text{Prost.}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \frac{x-x_0}{2} \\ \lim_{x \to x_0} y = 0 \end{array}} \quad = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cdot \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \cos x_0$$

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x \implies f'(x) = \cos x}$$

Analogamente

$$\boxed{f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\operatorname{sen} x}$$

Proprietà (Derivata prodotto)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$ e siano

$$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

entrambe derivabili in x_0

Allora $f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0, e vale

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

Proprietà (Derivata reciproco)

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A$, $f(x) \neq 0 \ \forall x \in A$

$\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ è derivabile in x_0, e vale

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}}$$

Dalla formula di derivazione del prodotto + reciproco, otteniamo

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \overset{\text{prodotto}}{=\!=}$$

$$\left(\frac{\quad}{g(x)}\right) = \left(\frac{\quad}{g(x)}\right)$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \stackrel{\text{reciproco}}{=}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(- \frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right) =$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ossia

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Esempio $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ossia

$$\boxed{f(x) = \tan x \implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Teorema (Derivazione funzioni composte)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$

$B \subseteq \mathbb{R}$ aperto

$f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 e $g(x)$ è derivabile in $\boxed{y_0 = f(x_0)}$

$\implies$ $g(f(x))$ è derivabile in x_0, e vale

$$\boxed{\left(g(f(x))\right)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

Teorema (Derivazione funzioni inverse)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

una funzione invertibile (iniettiva + suriettiva)

Supponiamo $f(x)$ sia derivabile in x_0 : $f'(x_0) \neq 0$

Allora anche $f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

e vale

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\ldots} \quad : \quad y_0 = f(x_0)$$

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}} \quad : \quad y_0 = f(x_0)$$

Esercizio

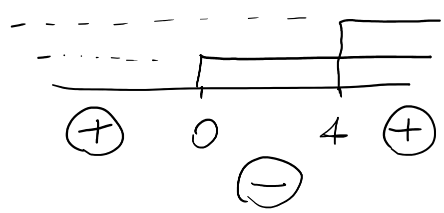
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)} = \left(\frac{\operatorname{sen}(0)}{\operatorname{sen}(0)} = \frac{0}{0} \text{ f. i.} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}}_{\to 1} \cdot 5\cancel{x} \cdot \underbrace{\frac{3x}{\operatorname{sen}(3 \cdot x)}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{3\cancel{x}} = \frac{5}{3}$$

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{x^2 - 4x}{x^2+1} \; : \; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x^2 - 4x \geq 0 \iff x(x-4) \geq 0$$



Sia $y \in \mathbb{R}$ maggiorante per A

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2+1} \leq y \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In particolare $\frac{x^2 - 4x}{x^2+1} \leq y$ se $x \leq 0 \cup x \geq 4$

positivo

$\Rightarrow$ $y>0$

Sol

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2-4x}{x^2+1} \leq y$$

$$x^2-4x \leq y \cdot x^2 + y$$

(P_x) $\boxed{(1-y)\,x^2 - 4x - y \leq 0}$ $\boxed{\text{Impongo Sol} = \mathbb{R}}$

Se $1-y>0$

$\Delta>0$ Sol $[x_1, x_2]$

$\Delta<0$ Sol $=\emptyset$

Mai Sol $=\mathbb{R}$

$0<y<1$ Mai

Quindi $1-y<0$ $(y>1)$

Riscrivo

(P_x) $(1-y)\,x^2-4x-y \leq 0$

$\Leftrightarrow$ (P_x) $\boxed{(y-1)\,x^2+4x+y \geq 0}$ $\boxed{\text{Impongo Sol} = \mathbb{R}}$

$\Delta \leq 0$ ossia $4^2-4\,(y-1)\cdot y \leq 0$

$$4\cdot\left(4-(y-1)y\right)\le 0$$

Ricordo $y>1$

$$4-y^2+y\le 0$$

$$y^2-y-4\ge 0$$

$$\Delta = 1+16 = 17$$

Sol

$$\cancel{y\le \frac{1-\sqrt{17}}{2}} \quad \cup \quad y\ge \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

NO

ok

Conclusione

$$A^*=\left\{y\in\mathbb{R} \;:\; y\ge \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow \sup A = \min A^* = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{17}}{2}\in A \iff \exists x\in\mathbb{R} : \frac{1+\sqrt{17}}{2} = \frac{x^2-4x}{x^2+1} \;?$$

$$(x^2+1)(1+\sqrt{17}) = 2x^2-8x$$

$$(1+\sqrt{17})x^2+(1+\sqrt{17})-2x^2+8x=0$$

$$(-1+\sqrt{17})x^2+8x+(1+\sqrt{17})=0$$

$$\Delta = 8^2 - 4(-1+\sqrt{17})(1+\sqrt{17}) = 8^2 - 4(17-1) =$$
$$= 8^2 - 4\cdot 2\cdot 8$$
$$= 8[8-8] = 0$$

$\Rightarrow$ Sol $\quad x_1 = \left(\dfrac{-8}{2(-1+\sqrt{17})}\right)$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1+\sqrt{17}}{2} = \max A}$$

Cerco minoranti $y \in \mathbb{R}$ per A

essendo che tra gli elementi di $\underline{A}$ ci sono numeri negativi

$\Rightarrow$ $y<0$

$$y \le \frac{x^2-4x}{x^2+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Impongo Sol} = \mathbb{R}}$$

$$y\cdot x^2 + y \le x^2 - 4x$$

$$(y-1)x^2 + 4x + y \le 0$$

Se $y-1>0$

- $\Delta>0$ Sol $[x_1, x_1]$ No
- $\Delta=0$ Sol $=\{x_1, x_2\}$ No

$\to \Delta = 0 \quad Sol = \{x_1, x_2\}$ (No)

$\to \Delta < 0 \quad Sol = \emptyset$ (No)

In realtà già sapevamo che $y > 1$ non poteva essere poiché $y < 0$

$\Rightarrow y < 1$

Riscrivo

$$(1-y)\,x^2 - 4x - y \geq 0$$

Impongo $Sol = \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow \Delta \leq 0$

$$\Delta = 4^2 - 4(1-y)(-y) \leq 0$$

$$= 4\,(4 + (1-y)\,y) \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4 + y - y^2 \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 - y - 4 \geq 0$$

$y < 0$

$$\Delta = 1 + 16 = 17$$

Sol

$$y \leq \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad \cup \quad \cancel{y \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2}}$$

No

Conclusione

$$A_* = \left\{ y \in \mathbb{R} : y \leq \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \inf A = \max A_* = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{17}}{2} \in A \iff \exists x \in \mathbb{R} : \frac{1-\sqrt{17}}{2} = \frac{x^2-4x}{x^2+1} \; ?$$

$$(x^2+1)(1-\sqrt{17}) = 2x^2 - 8x$$

$$(-1-\sqrt{17})x^2 + 8x + (1-\sqrt{17}) = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4(-1-\sqrt{17})(1-\sqrt{17}) =$$

$$= 8^2 - 4\left((-\sqrt{17})^2 - 1^2\right) = 8^2 - 4\cdot 16 = 8^2 - 4\cdot 2\cdot 8$$

$$= 8(8 - 4\cdot 2) = 0$$

Si $\frac{1-\sqrt{17}}{2} \in A$

$$\Rightarrow \quad \min A = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \quad !!!$$

Esercizio

$$A = \left\{ \log_2 (n^2 - 6n + 10) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$A = \{ \log_2 (n^2 - 6n + 10) \;:\; n \in \mathbb{N} \}$$

Cerco maggioranti $x \in \mathbb{R}$

$$\log_2 (n^2 - 6n + 10) \le x \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Impongo

Sol $= \mathbb{N}$

Riscrivo: $\log_2 (n^2 - 6n + 10) \le \log_2 2^x$

monotonia: $n^2 - 6n + 10 \le 2^x$

(P_n) $\quad \boxed{n^2 - 6n + (10 - 2^x) \le 0}$

Impongo Sol $= \mathbb{N}$

$$\Delta = 6^2 - 4(10 - 2^x) = 36 - 40 + 2^2 \cdot 2^x = -4 + 2^{x+2}$$

Se $\Delta > 0$ Sol

$$\frac{6 - \sqrt{\Delta}}{2} \le n \le \frac{6 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Impongo Sol $= \mathbb{N} \implies n \le \frac{6 + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ossia $\mathbb{N}$ dovrebbe essere lim sup $\cancel{\exists}$ (Archimede) se $\Delta = 0$ $\quad Sol = \{n_1\}$ $\quad$ No $\quad Sol = \mathbb{N}$

$\Delta < 0$ $\quad Sol = \emptyset$ $\quad$ No $\quad Sol = \mathbb{N}$

Conclusione $\quad \boxed{\sup A = +\infty}$

Cerco minoranti

$x \in \mathbb{R} \quad : \quad x \leq \log_2 (n^2 - 6n + 10)$

$\iff \quad 2^x \leq n^2 - 6n + 10$

$\iff (P_n) \quad \boxed{n^2 - 6n + (10 - 2^x) \geq 0}$ $\quad$ Impongo $Sol = \mathbb{N}$

se $\Delta = 6^2 - 4(10 - 2^x) = \boxed{-4 + 2^{x+2}} > 0$

sol $\quad n \leq \frac{6 - \sqrt{\Delta}}{2}$ No $\quad \cup \quad n \geq \frac{6 + \sqrt{\Delta}}{2}$

essendo che devo imporre $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad n \geq \frac{6 + \sqrt{\Delta}}{2}$

$\iff \quad 0 \geq \frac{6 + \sqrt{\Delta}}{2}$ $\quad$ Mai se invece $\Delta \leq 0 \implies Sol = \mathbb{N}$

<u>ossia</u> $$-4 + 2^{x+2} \leq 0$$

$$2^{x+2} \leq 4$$

$$2^{x+2} \leq 2^2$$

$$x+1 \leq 2 \iff x \leq 1$$

$$\implies A_* = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \}$$

$$\implies \inf A = \max A_* = 1$$

$1 \in A? \iff \quad 1 = \log_2 (n^2 - 6n + 10) \quad ?$

$$\log_2 2 = \log_2 (n^2 - 6n + 10) \ ?$$

$$2 = n^2 - 6n + 10$$

$$n^2 - 6n + 8 = 0$$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$ Si

$$\Rightarrow \quad 1 = \min A \qquad \blacksquare$$